

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Modèles de champs aléatoires spatio-temporels non-symétriques

3ème Journée RESSTE

Ricardo CARRIZO VERGARA

MINES ParisTech / INRA-PACA, Bio-SP

Le vendredi 27 novembre 2015

- 1 **Présentation**
- 2 Méthode proposée : Asymétrie par mouvement
- 3 Estimation des paramètres du mouvement
- 4 Application à des données simulées.
- 5 Conclusions et perspectives

Contexte du problème et modélisation

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Modélisation de variables régionalisées spatio-temporelles : recherche de modèles de champs aléatoires spatio-temporels valides, flexibles et pratiques.

On se pose dans le cadre des processus stochastiques indexés dans un domaine spatio-temporel :

$$(Z(x, t))_{x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}}$$

But : trouver des modèles de covariance adaptés aux besoins du domaine, traduits en des fonctions de covariance pour le processus :

$$C((x, t), (y, s)) = \text{Cov}(Z(x, t), Z(y, s))$$

Des modèles disponibles

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Les modèles spatio-temporels multivariés forment un champ relativement nouveau, avec peu de résultats jusqu'à maintenant.

Des recherches faites à l'unité BioSP ont convergé vers de modèles sophistiqués. Par exemple, nous avons le modèle Gneiting-Matérn :

$$C((x, t), (y, s)) = C(x - y, t - s) = \frac{\sigma^2}{\psi(|t - s|^2)^{d/2}} \mathcal{M}\left(\frac{x - y}{\psi(|t - s|^2)} \mid \nu, r\right) \quad (1)$$

où ψ est une fonction positive de dérivée complètement monotone et \mathcal{M} est la fonction de covariance du modèle Matérn :

$$\mathcal{M}(x - y \mid \nu, r) := \frac{1}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} (r \|x - y\|)^{\nu} \mathcal{K}_{\nu}(r \|x - y\|) \quad (2)$$

Problématique

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Malgré la présence de modèles assez flexibles, les modèles généralement utilisés sont complètement symétriques au sens spatio-temporel :

$$\begin{aligned}C((x, t) , (y, s)) &= C((y, t) , (x, s)) \\ &= C((x, s) , (y, t)) = C((y, s) , (x, t))\end{aligned}$$

Dans le cas stationnaire, si l'on pose $h = x - y$ et $u = t - s$, cette condition se traduit par :

$$C(h, u) = C(-h, u) = C(h, -u) = C(-h, -u)$$

Problématique

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Nous avons des raisons de croire que les modèles non-symétriques peuvent être mieux adaptés pour certaines applications. Par exemple en météorologie nous pouvons souvent observer un déplacement des conditions météorologiques dans l'espace.

<http://meteociel.fr/observations-meteo/satellite.php>

Problématique

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Nous avons des raisons de croire que les modèles non-symétriques peuvent être mieux adaptés pour certaines applications. Par exemple en météorologie nous pouvons souvent observer un déplacement des conditions météorologiques dans l'espace.

<http://meteociel.fr/observations-meteo/satellite.php>

→ Nous avons besoin de modèles avec des asymétries spatio-temporelles.

- 1 Présentation
- 2 Méthode proposée : Asymétrie par mouvement**
- 3 Estimation des paramètres du mouvement
- 4 Application à des données simulées.
- 5 Conclusions et perspectives

Une première approche : Modèle figé

Considérons un processus spatial $(Z_0(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$, de carré intégrable, de moyenne nulle et de fonction de covariance C_0 . Soit $v \in \mathbb{R}^d$. Définissons le processus spatio-temporel Z par :

$$Z(x, t) = Z_0(x - vt) \quad (3)$$

Nous avons juste bougé un processus spatial. Ce processus présente des asymétries spatio-temporelles, car sa fonction de covariance est déterminée par :

$$C((x, t), (y, s)) = C_0((x - vt), (y - vs)) \quad (4)$$

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Une première approche : Modèle figé

Considérons un processus spatial $(Z_0(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$, de carré intégrable, de moyenne nulle et de fonction de covariance C_0 . Soit $v \in \mathbb{R}^d$. Définissons le processus spatio-temporel Z par :

$$Z(x, t) = Z_0(x - vt) \quad (3)$$

Nous avons juste bougé un processus spatial. Ce processus présente des asymétries spatio-temporelles, car sa fonction de covariance est déterminée par :

$$C((x, t), (y, s)) = C_0((x - vt), (y - vs)) \quad (4)$$

→ Ce modèle est un peu restrictif : juste un mouvement à vélocité constante, et sans changement temporel hors du mouvement.

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Généralisation : des changements temporels aléatoires

Modèles de champs aléatoires spatio-temporels non-symétriques

CARRIZO V, R.

Présentation

Méthode proposée : Asymétrie par mouvement

Estimation des paramètres du mouvement

Application à des données simulées.

Conclusions et perspectives

On considère un processus spatio-temporel de base $(Z_0(x, t))_{x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}}$ de carré intégrable, de moyenne nulle et de fonction de covariance C_0 . Alors, considérons le processus Z défini par :

$$Z(x, t) = Z_0(x - vt, t) \quad (5)$$

Ce modèle présente aussi des asymétries spatio-temporelles. Sa fonction de covariance est donnée par :

$$C((x, t), (y, s)) = C_0((x - vt, t), (y - vs, s)) \quad (6)$$

Généralisation : des changements temporels aléatoires

Modèles de champs aléatoires spatio-temporels non-symétriques

CARRIZO V, R.

Présentation

Méthode proposée : Asymétrie par mouvement

Estimation des paramètres du mouvement

Application à des données simulées.

Conclusions et perspectives

On considère un processus spatio-temporel de base $(Z_0(x, t))_{x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}}$ de carré intégrable, de moyenne nulle et de fonction de covariance C_0 . Alors, considérons le processus Z défini par :

$$Z(x, t) = Z_0(x - vt, t) \quad (5)$$

Ce modèle présente aussi des asymétries spatio-temporelles. Sa fonction de covariance est donnée par :

$$C((x, t), (y, s)) = C_0((x - vt, t), (y - vs, s)) \quad (6)$$

→ Comment généraliser pour plusieurs types de mouvement ?

Un fait utile

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Il existe une façon simple d'introduire une asymétrie spatio-temporelle dans un modèle :

Soit $C_0 : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de covariance quelconque. Prenons une famille d'applications de \mathbb{R}^d vers \mathbb{R}^d indexée par le temps, $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Définissons une nouvelle fonction de covariance spatio-temporelle C par :

$$C((x, t) , (y, s)) = C_0((f_t(x), t) , (f_s(y), s)) \quad (7)$$

Alors, C est une fonction de covariance valide (Définir $Z(x, t) = Z_0(f_t(x), t)$ pour un processus Z_0 déjà connu).

Un fait utile

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Il existe une façon simple d'introduire une asymétrie spatio-temporelle dans un modèle :

Soit $C_0 : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de covariance quelconque. Prenons une famille d'applications de \mathbb{R}^d vers \mathbb{R}^d indexée par le temps, $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Définissons une nouvelle fonction de covariance spatio-temporelle C par :

$$C((x, t) , (y, s)) = C_0((f_t(x), t) , (f_s(y), s)) \quad (7)$$

Alors, C est une fonction de covariance valide (Définir $Z(x, t) = Z_0(f_t(x), t)$ pour un processus Z_0 déjà connu).

Nous allons profiter ce fait en choisissant une famille de fonctions $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ qui **décrivent un mouvement**

Mouvement

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Définition

Soit $(\varphi_{t,u})_{t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}}$ une famille d'applications de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d , avec $d \in \mathbb{N}^*$, qui satisfait les conditions suivantes :

- $\varphi_{t,0} = I_d \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- $\varphi_{t,u+\delta} = \varphi_{t+u,\delta} \circ \varphi_{t,u} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \forall \delta \in \mathbb{R}$

On dit qu'une telle famille décrit un **mouvement** en \mathbb{R}^d . Par commodité, on appellera la famille $(\varphi_{t,u})_{t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}}$, le **mouvement**.

Remarque

Si $(\varphi_{t,u})_{t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}}$ est un mouvement, alors $\varphi_{t,u}$ est bijective pour tout t et u , et on a $\varphi_{t,u}^{-1} = \varphi_{t+u,-u}$.

Exemples

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

- Mouvement avec un profil de vitesse constant dans le temps et l'espace. Sur \mathbb{R}^d , soit $v \in \mathbb{R}^d$ un vecteur constant. On définit :

$$\varphi_{t,u}(x) = x + uv$$

- Mouvement avec un profil de vitesse constant dans l'espace mais variable dans le temps. Soient $v_{unit} \in \mathbb{R}^d$ un vecteur unitaire et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. On définit :

$$\varphi_{t,u}(x) = x + uv_{unit} \int_t^{t+u} v(s) ds$$

Exemples

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

- Mouvement circulaire uniforme sur \mathbb{R}^2 . Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et soit $x_c \in \mathbb{R}^2$. On définit :

$$\varphi_{t,u}(x) = \begin{pmatrix} \cos(\omega u) & -\sin(\omega u) \\ \sin(\omega u) & \cos(\omega u) \end{pmatrix} (x - x_c) + x_c$$

- Mouvement circulaire avec vitesse angulaire différente dans chaque rayon r . Dans l'exemple précédent, ω est une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , qui varie selon le rayon $\|x - x_c\|$. En particulier, si $\omega(r) = v/r$, avec $v \in \mathbb{R}$, on a un mouvement circulaire avec la même vitesse tangentielle pour tous les rayons.

Processus soumis à mouvement

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Définition

Soit $(Z(x, t))_{x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}}$ un processus stochastique réel de carré intégrable. On dit que le processus Z est **soumis au mouvement** décrit par $(\varphi_{t,u})_{t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}}$ s'il existe un processus spatio-temporel $(Z_0(x, t))_{x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}}$ tel que :

$$Z(x, t) = Z_0(\varphi_{0,t}^{-1}(x), t) \quad (8)$$

Dans ce cas, si C_0 est la fonction de covariance de Z_0 , alors la fonction de covariance de Z satisfait :

$$C((x, t), (y, s)) = C_0((\varphi_{0,t}^{-1}(x), t), (\varphi_{0,s}^{-1}(y), s)) \quad (9)$$

Z_0 est le **processus au repos** et C_0 la **fonction de covariance au repos**

Exemple : vitesse constante

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Exemple : mouvement circulaire

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Une propriété

Définition

Soit $(\varphi_{t,u})_{t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}}$ un mouvement sur \mathbb{R}^d , et soit $x \in \mathbb{R}^d$ un point quelconque. On appelle la **ligne de courant** passant par x l'ensemble :

$$\ell(x) = \{\varphi_{t,u}(x) \in \mathbb{R}^d \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\} \quad (10)$$

Comparons deux points reliés selon le mouvement :

$$\text{Cov}(Z(x, t), Z(\varphi_{t,u}(x), t+u)) = C_0((\varphi_{0,t}^{-1}(x), t), (\varphi_{0,t}^{-1}(x), t+u))$$

La covariance de Z entre deux points reliés par un mouvement sur une même ligne de courant ne dépend pas de leur décalage spatial.

Une propriété

Dans le cas stationnaire :

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(Z(x, t), Z(\varphi_{t,u}(x), t + u)) \\ &= C_0((\varphi_{0,t}^{-1}(x), t) , (\varphi_{0,t}^{-1}(x), t + u)) = C_0(0, u) \end{aligned}$$

En général, la variabilité temporelle du processus Z est expliquée par le mouvement et par des conditions aléatoires décrites par la structure temporelle de C_0 .

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Le modèle figé général

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Définition

Soit $(Z(x, t))_{x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}}$ un processus stochastique spatio-temporel soumis au mouvement $(\varphi_{t,u})_{t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}}$, avec une fonction de covariance au repos C_0 , et fonction de moyenne μ . Supposons que :

- $\mu(x, t) = \mu(\varphi_{t,u}(x), t + u) \quad \forall x, \forall t, \forall u$
- C_0 est une fonction de covariance purement spatiale.

On dit qu'un tel processus Z suit un modèle **figé** (ou **frozen** en anglais).

Ce processus est constant sur les lignes de courant selon le mouvement :

$$Z(x, t) = Z_0(\varphi_{0,t}^{-1}(x)) \quad (11)$$

- 1 Présentation
- 2 Méthode proposée : Asymétrie par mouvement
- 3 Estimation des paramètres du mouvement**
- 4 Application à des données simulées.
- 5 Conclusions et perspectives

Un lien avec les EDP de transport

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Si l'on avait un modèle complètement déterministe, avec une condition initiale $Z_0(x)$ connue et un mouvement $(\varphi_{s,u})_{s,u}$ donné, alors notre fonction spatio-temporelle cherchée n'est autre que :

$$Z(x, t) = Z_0(\varphi_{0,t}^{-1}(x)) \quad (12)$$

Solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t}(x, t) + (\nabla_x Z)^T \text{Jac}_{\varphi_{0,t}}(\varphi_{(t,-t)}(x)) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, t, -t) - \frac{\partial \varphi}{\partial s}(x, t, -t) \right] = 0 \\ Z(x, 0) = Z_0(x) \end{cases} \quad (13)$$

Un lien avec les EDP de transport

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Ajouter de l'aléa peut se traduire dans une condition (pas très formelle) du type :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t}(x, t) + (\nabla_x Z)^T \text{Jac}_{\varphi_{0,t}}(\varphi(t, -t)(x)) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, t, -t) - \frac{\partial \varphi}{\partial s}(x, t, -t) \right] \approx 0 \\ Z(x, 0) = Z_0(x) \end{cases} \quad (14)$$

où Z_0 est maintenant un processus stochastique spatial et “ ≈ 0 ” veut dire que cette condition est soumise à des conditions aléatoires non contrôlables, décrites par des processus stochastiques.

Un lien avec les EDP de transport

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Nous allons obtenir des estimateur à partir des discrétisations des formes différentielles. Nous allons nous restreindre au cas du mouvement à vitesse constante, dont l'EDP de transport associée est :

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(x, t) + v^T \nabla_x Z(x, t) = 0$$

Estimation par prédiction sur la ligne de courant

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Première proposition : une version discrétisée de cette forme différentielle est :

$$\frac{Z(x + v\Delta t, t + \Delta t) - Z(x, t)}{\Delta t} \approx 0$$

Nous pouvons demander que ces variations soient petites :

$$Z(x + v\Delta t, t + \Delta t) - Z(x, t) \approx 0$$

En ayant des grilles de mesures spatio-temporelles fixées, rien ne nous garantit qu'on aura un échantillon aux coordonnées $(x + v\Delta t, t + \Delta t)$. On remplace $Z(x + v\Delta t, t + \Delta t)$ par une prédiction notée $Z^*(x + v\Delta t, t + \Delta t)$.

Estimation par prédiction sur la ligne de courant

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Nous définissons la fonction :

$$f_1(v) = \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{i=1}^N (Z^*(x_i + v\Delta t, t + \Delta t) - Z(x_i, t))^2 + (Z(x_i, t + \Delta t) - Z^*(x_i - v\Delta t, t))^2 \quad (15)$$

Et l'estimateur de v sera alors :

$$\hat{v} = \arg \min_v f_1(v) \quad (16)$$

Pour la prédiction Z^* , nous avons utilisé un krigeage ordinaire purement spatial à chaque temps.

Estimation par approximation du gradient spatial

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Deuxième Proposition. Nous utilisons l'approximation du gradient spatial $\nabla_x Z(x, t)^*$.

Soit $g_{i,t} = \nabla_x Z(x_i, t)^*$, l'approximation du gradient spatial au point de mesure x_i et le temps t . Alors, la forme différentielle est discrétisée par :

$$\frac{Z(x_i, t + \Delta t) - Z(x_i, t)}{\Delta t} + v^T g_{i,t} = 0 \quad (17)$$

Nous proposons alors la fonction à minimiser :

$$f_2(v) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{Z(x_i, t + \Delta t) - Z(x_i, t)}{\Delta t} + v^T g_{i,t} \right)^2 \quad (18)$$

Estimation par approximation du gradient spatial

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Ce problème est convexe et il a une solution unique déterminée par le système linéaire :

$$\left(\sum_{i=1}^N g_{i,t} g_{i,t}^T\right) \hat{v} = - \sum_{i=1}^N \frac{Z(x_i, t + \Delta t) - Z(x_i, t)}{\Delta t} \quad (19)$$

Pour l'approximation du gradient, nous avons utilisé le gradient du krigeage du processus Z .

- 1 Présentation
- 2 Méthode proposée : Asymétrie par mouvement
- 3 Estimation des paramètres du mouvement
- 4 Application à des données simulées.
- 5 Conclusions et perspectives

Modèle figé

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Nous avons simulé un modèle figé avec fonction de covariance spatiale exponentielle de paramètres $a = 13.3333$ et $\sigma^2 = 1$, soumis à une vitesse fixée $v = (-10, -7)$. La simulation s'est faite sur un domaine $D = [0, 40] \times [0, 40] \subset \mathbb{R}^2$, avec 200 points spatiaux et 23 temps de mesure.

Modèle figé

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Nous avons simulé un modèle figé avec fonction de covariance spatiale exponentielle de paramètres $a = 13.3333$ et $\sigma^2 = 1$, soumis à une vitesse fixée $v = (-10, -7)$. La simulation s'est faite sur un domaine $D = [0, 40] \times [0, 40] \subset \mathbb{R}^2$, avec 200 points spatiaux et 23 temps de mesure.

Pour les paramètres spatiaux, nous les avons estimés avec des méthodes de vraisemblance composite, en ayant de bons résultats : $\hat{a} = 13.78$, $\hat{\sigma}^2 = 0.88$

Modèle figé : estimation sur la ligne de courant

Modèles de champs aléatoires spatio-temporels non-symétriques

CARRIZO V, R.

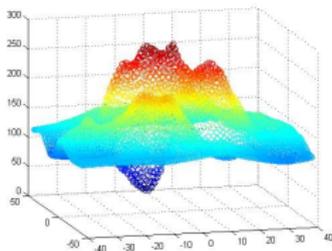
Présentation

Méthode proposée : Asymétrie par mouvement

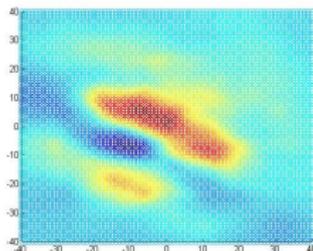
Estimation des paramètres du mouvement

Application à des données simulées.

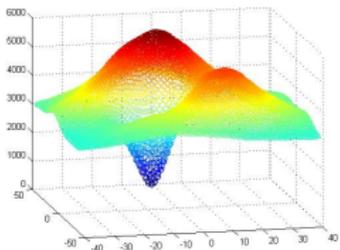
Conclusions et perspectives



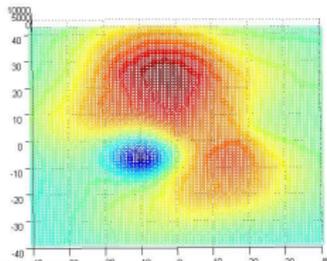
(a) Fonction $f_1^{\Delta t}$, vue de côté



(b) Fonction $f_1^{\Delta t}$, vue du ciel



(c) Fonction f_1 , vue de côté



(d) Fonction f_1 , vue du ciel

Modèle figé

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

→ La méthode par estimation sur la ligne de courant a bien marché ($\hat{v} = (-10.03, -7.07)$), mais elle dépendait de la valeur initiale proposée pour la vitesse.

Modèle figé

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

→ La méthode par estimation sur la ligne de courant a bien marché ($\hat{v} = (-10.03, -7.07)$), mais elle dépendait de la valeur initiale proposée pour la vitesse.

→ La méthode d'approximation du gradient spatial a échoué, en donnant des valeurs aberrantes.

Modèle non-figé

Nous avons simulé un modèle uni-variable Gneiting pour C_0 , correspondant à l'équation :

$$C_0(h, u) = \frac{\sigma^2}{a|u|^\alpha + 1} \exp\left(-c\left(\frac{\|h\|^2}{a|u|^\alpha + 1}\right)^\gamma\right) \quad (20)$$

Nous avons ajouté une vitesse, pour obtenir une fonction de covariance $C(h, u) = C_0(h - uv, u)$. Les paramètres du modèle ont été $c = 0.01$, $\gamma = 0.8$, $\sigma^2 = 1$, $a = 0.03$, $\alpha = 0.3$, $v = (-6, 9)$. Les résultats sont basés sur 50 simulations indépendantes, faites sur un domaine $D = [0, 100] \times [0, 100] \subset \mathbb{R}^2$. Le nombre de points spatiaux a été 200, et les temps de mesure 5. Les paramètres spatiaux c, γ, σ^2 ont été estimés avec des méthodes de vraisemblance composite, avec des bons résultats.

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Modèle non-figé

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

	$v_1^{(1)}$	$v_2^{(1)}$	$v_1^{(2)}$	$v_2^{(2)}$
valeur réelle	-6	9	-6	9
moyenne	-5.97	8.95	-6.46	9.68
écart-type	0.17	0.18	1.93	2.09
min	-6.48	8.55	-11.10	3.49
max	-5.61	9.33	-3.10	14.46

TABLE: Résultats de l'estimation de la vitesse avec les méthodes de prédiction sur la ligne de courant (1) et par approximation du gradient spatial (2).

Modèle non-figé

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

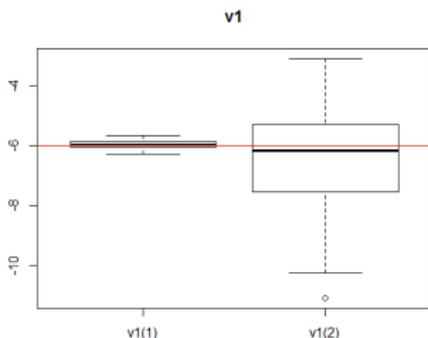
Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

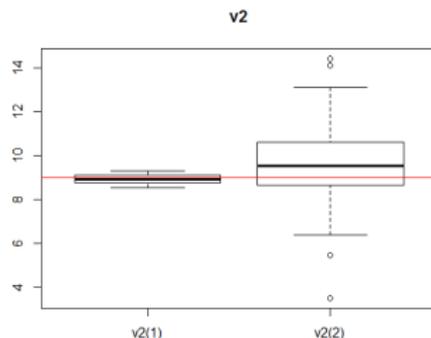
Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives



(e) Boxplot pour la première coordonnée de la vitesse.



(f) Boxplot pour la deuxième coordonnée de la vitesse.

FIGURE: Boxplots correspondants aux estimations de la vitesse du modèle simulé. En rouge est posée une ligne indiquant la vraie valeur. En chaque image on trouve l'estimateur correspondant à la méthode de prédiction sur la ligne de courant (1) et à la méthode pour approximation du gradient spatial (2).

- 1 Présentation
- 2 Méthode proposée : Asymétrie par mouvement
- 3 Estimation des paramètres du mouvement
- 4 Application à des données simulées.
- 5 Conclusions et perspectives

Conclusions

→ Nous avons créé une méthode simple pour bouger un processus spatio-temporel selon un mouvement décrit d'une façon convenable.

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Conclusions

→ Nous avons créé une méthode simple pour bouger un processus spatio-temporel selon un mouvement décrit d'une façon convenable.

→ Cette méthode est applicable au cas des champs aléatoires multivariés.

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

Conclusions

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

→ Nous avons créé une méthode simple pour bouger un processus spatio-temporel selon un mouvement décrit d'une façon convenable.

→ Cette méthode est applicable au cas des champs aléatoires multivariés.

→ Nous avons proposé des méthodes d'estimation des paramètres des mouvement qui sont adaptées à la nature du contexte et adaptables a différents types de mouvement. Ils peuvent être mélangés avec des méthodes plus classiques.

Conclusions

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

→ Nous avons créé une méthode simple pour bouger un processus spatio-temporel selon un mouvement décrit d'une façon convenable.

→ Cette méthode est applicable au cas des champs aléatoires multivariés.

→ Nous avons proposé des méthodes d'estimation des paramètres des mouvement qui sont adaptées à la nature du contexte et adaptables a différents types de mouvement. Ils peuvent être mélangés avec des méthodes plus classiques.

→ Les deux méthodes proposées ont des comportements variables selon les modèles choisis et les valeurs des paramètres.

Fin

Modèles de
champs
aléatoires
spatio-
temporels
non-
symétriques

CARRIZO V,
R.

Présentation

Méthode
proposée :
Asymétrie par
mouvement

Estimation des
paramètres du
mouvement

Application à
des données
simulées.

Conclusions et
perspectives

MERCI